ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

MATHEMATIQUES I
(3 pages dactylographiées) — **Centre à l'Etranger**

N.B.1. Le candidat pourra utiliser tous les résultats fournis par l'énoncé, même s'il ne les a pas justifiés.
N.B.2. La première et la seconde partie sont indépendantes.

Questions préliminaires

P.1. Vérifier : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |e^{i\theta} - 1| \leqslant |\theta|$

P.2. Vérifier : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z - 1 - z| \leqslant |z|^2 . e^{|z|}$

Première Partie

Pour tous réels α et β **strictement positifs**, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\, dx, \quad J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\beta}\, dt$$

sous réserve que ces intégrales généralisées convergent.

I.1. Déterminer l'ensemble B des valeurs des réels β (> 0) pour lesquels l'intégrale $J(\beta)$ est convergente. A cet effet, on pourra effectuer une intégration par parties dans laquelle $\sin t\, dt = d(1 - \cos t)$.

I.2. Grâce au changement de variable $t = x^\alpha$, établir une relation simple reliant les fonctions I et J.
Déterminer l'ensemble A des valeurs des réels α (>0) pour lesquels l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

I.3. On se propose d'étudier $J(\beta)$ au voisinage de $\beta = 1$. Pour cela on pose $\beta = 1 - x$.

a) Montrer qu'il existe une application Φ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$J(1 - x) = \Phi(x) \cdot T(x), \quad \text{où} \quad T(x) = \int_0^{+\infty} u^x \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$$

b) Montrer qu'il existe des constantes c et d (que l'on laissera sous la forme d'intégrales dont on aura prouvé la convergence) telles que :

$$T(x) = c + dx + \int_0^{+\infty} \varphi(u,x)\, du, \text{ avec :}$$

$$\varphi(u,x) = (u^x - 1 - x \operatorname{Log} u)\, \frac{\sin^2 u}{u^2} .$$

Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, montrer (en utilisant la question P.2) :

$$\forall u \in]0,1], \quad |\varphi(u,x)| \leqslant x^2 u^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Log}^2 u$$

et : $\forall u \in [1, +\infty[, \quad |\varphi(u,x)| \leqslant x^2 u^{-3/2} \operatorname{Log}^2 u$

Montrer qu'il existe une constante k telle que :

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \quad \left| \int_0^{+\infty} \varphi(u,x)\, du \right| \leqslant k x^2$$

c) Trouver un développement limité à l'ordre 1, au voisinage de $x = 0$, d'abord de la fonction T, puis de la fonction $x \mapsto J(1 - x)$.

I.4. Pour chacune des séries de termes généraux $I(n)$ et $(-1)^n I(n)$, indiquer sa nature.

.../...

Seconde Partie

On se propose dans cette partie de trouver un mode de calcul de l'intégrale I (2) introduite en I. Ici cette intégrale sera notée S. On a donc :

$$S = \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

II.1. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée $C = \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,du$ et l'égalité :

$$C = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

II.2. Pour tout $x > 0$, exprimer $s(x) = \int_0^{+\infty} \sin(x\,t^2)\,dt$ et $c(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\,dt$ en fonction de S et C.

II.3. Montrer que les intégrales :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x(1+t^2))}{1+t^2}\,dt, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$$

convergent pour tout x réel. On notera par la suite : $f + ig = \ell$.

b) Montrer que les intégrales :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(x(1+t^2))\,dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \cos(x(1+t^2))\,dt$$

convergent pour tout x réel. On notera par la suite $F + iG = L$.

On pourra montrer qu'il existe des constantes $a_{i,j}$ (que l'on donnera) telles que :

$$F(x) = a_{11}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + a_{12}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad G(x) = a_{21}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + a_{22}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

II.4. Dans cette question, on donne un réel $x > 0$, et on se propose de démontrer que ℓ admet au point x une dérivée égale à $L(x)$.

Pour tout réel $h \neq 0$, on note :

$$r(h) = \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} - L(x)$$

a) Soit A un réel strictement positif. On note :

$$I_A(x) = \int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,e^{ix(1+t^2)}\,dt \quad : \quad H_A(x) = x\,I_A(x)$$

- Vérifier :

$$H_A(x) = \frac{i}{2}\,\frac{e^{ix(1+A^2)}}{A(1+A^2)} - \frac{i}{2}\,K_A(x) \qquad (1)$$

où :
$$K_A(x) = \int_A^{+\infty} \frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)^2}\,e^{ix(1+t^2)}\,dt$$

En utilisant la question P.1, vérifier, pour tout $h \neq 0$:

$$\left|\frac{K_A(x+h) - K_A(x)}{h}\right| \leqslant \frac{3}{A} \qquad (2)$$

et
$$\left|\frac{H_A(x+h) - H_A(x)}{h}\right| \leqslant \frac{2}{A} \qquad (3)$$

- Vérifier :

$$\frac{I_A(x+h) - I_A(x)}{h} = \frac{H_A(x+h) - H_A(x)}{h(x+h)} - \frac{I_A(x)}{x+h}$$

.../...

et en déduire que, pour tout h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{I_A(x+h) - I_A(x)}{h} \right| \leq \frac{6}{Ax} \qquad (4)$$

b) Ici $\varepsilon > 0$ est donné. Montrer qu'il est possible de fixer $A > 0$ tel que :

$$\frac{6}{Ax} \leq \varepsilon \text{ et } \left| \int_A^{+\infty} e^{ix(1+t^2)}\, dt \right| \leq \varepsilon$$

A étant ainsi fixé, en considérant $r(h)$ comme la somme de deux intégrales, l'une sur $[0,A]$, l'autre sur $[A,+\infty[$, montrer à l'aide de P.2 que, pour tout h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$|r(h)| \leq 2\varepsilon + |h|\,(A + A^3)\, e^{x(1+A^2)/2}$$

c) En conclure que $\ell'(x) = L(x)$

II.5. a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \ell(x)$. On pourra utiliser $]0, -\infty[=]0, \frac{1}{\sqrt{x}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty[$

Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \int_x^{+\infty} - F(t)\, dt$, $g(x) = \int_x^{+\infty} - G(t)\, dt$

b) Calculer $\lim_{x \to +0} (\ell(x) - \ell(0))$. On pourra procéder comme en a).

Les fonctions f et g sont-elles continues à droite en 0 ?

II.6. Démontrer les égalités : $f(0) = 2SC$, $g(0) = S^2 - C^2$

En déduire les valeurs de S et C.

****
**
*